

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

〔1〕 座標平面上に点 $A(-8, 0)$ をとる。また, 不等式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は, 中心が点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$, 半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の
 $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

- | | | |
|----------|----------|------|
| ① 周 | ② 内部 | ③ 外部 |
| ④ 周および内部 | ⑤ 周および外部 | |

以下, 点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を Q とし, 方程式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

の表す図形を C とする。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1)により、直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話している。

点 A を通り、傾きが k の直線を ℓ とする。

太郎：直線 ℓ の方程式は $y = k(x + 8)$ と表すことができるから、これを

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

に代入することで接線を求められそうだね。

花子： x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y = k(x + 8)$ を $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入すると、 x についての 2 次方程式

$$(k^2 + 1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0$$

が得られる。この方程式が **力** ときの k の値が接線の傾きとなる。

力 の解答群

- ① 重解をもつ
- ② 異なる二つの実数解をもち、一つは 0 である
- ③ 異なる二つの正の実数解をもつ
- ④ 正の実数解と負の実数解をもつ
- ⑤ 異なる二つの負の実数解をもつ
- ⑥ 異なる二つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると

$$\tan \theta = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$$

であり、直線 $y = \text{オ}$ と異なる接線の傾きは $\tan \text{ケ}$ と表すことができる。

ケ の解答群

- ① θ
- ② 2θ
- ③ $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
- ④ $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
- ⑤ $(\theta + \pi)$
- ⑥ $(\theta - \pi)$
- ⑦ $\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
- ⑧ $\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

- (iv) 点 A を通る C の接線のうち、直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。このとき、(ii) または (iii) の考え方をを用いることにより

$$k_0 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であることがわかる。

直線 l と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| ① $k > k_0$ | ⑥ $k \geq k_0$ |
| ② $k < k_0$ | ⑦ $k \leq k_0$ |
| ③ $0 < k < k_0$ | ⑧ $0 \leq k \leq k_0$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)